احاطه‌گری (۱)

محمود نصیری

اشاره

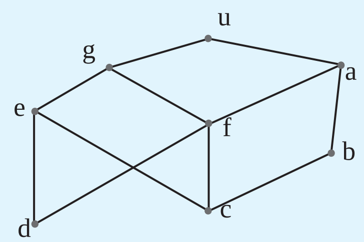
بحث «احاطه‌گری» که یکی از بحث‌های جدید در مورد گراف‌هاست، در کتاب «ریاضیات گسسته» پایهٔ دوازدهم رشتهٔ ریاضی‌فیزیک به‌عنوان یکی از سرفصل‌های کتاب انتخاب شده است.

در این مقاله، به‌منظور بررسی و شـــکافتن این بحث، مفاهیم اولیهٔ گراف را دانسته فرض می‌کنیم و بیشتر به خود مفهوم احاطه‌گری می‌پردازیم. ابتدا انگیزهٔ شروع این بحث را شرح می‌دهیم. ســـپس با بیان سه تعریف معادل از احاطه‌گری، به مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم و مینیمال و کاربردهایی از آن‌ها می‌پردازیم. توجه ویژه به مسائل کتاب درسی یکی از هدف‌های این مقاله است.

کلیدواژه‌ها: مجموعهٔ احاطه‌گر، همسایگی یک رأس، احاطه‌گر مینیمم و مینیمال، عدد احاطه‌گری

ایستگاه‌های رادیویی

فرض کنیم هشت شهر مطابق شکل ۱ قرار دارند. می‌خواهیم در بعضی از این شهرها ایستگاه رادیویی بسازیم. هر شهر می‌تواند از شهر همسایه یا مجاور خود مطابق شکل استفاده کند. حداقل تعداد ایستگاه‌های ساخته‌شده چقدر است؟



(۱)

مطابق شکل ۱، اگر ایستگاه‌ها در شهرهای a و e ساخته شوند، تمام شهرهای مجاور را پوشش می‌دهند. شهرهای u، b و f و خود a توسط شهر a پوشش داده یا احاطه می‌شوند. به همین ترتیب شهرهای g، c و d و همچنین خود e توسط شهر e احاطه، یا در بیان این مسئله، پوشش داده می‌شوند. اگر $V=\{a,b,c,d,e,f,g,u\}$ مجموعهٔ رأس‌های این گراف باشد، مجموعه رأس‌های $S=\{a,e\}$ طوری اســـت که هر رأس V مجاور رأسی از S است. این ویژگی هدف تعریف‌های بعدی است.

مطالعهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر در گراف‌ها در سال ۱۹۵۸ توسط **برگ**[1] و در سال ۱۹۶۲ توسط **اُر**[2] به‌طور مستقل شروع شد.

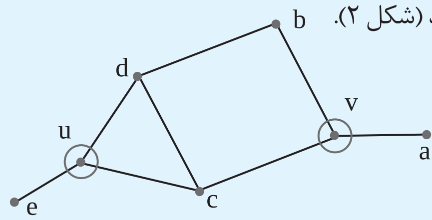
مجموعه‌های احاطه‌گر[3]

فرض کنیم G گرافی بـــا مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشـــد. رأس v از G را مجاور رأس a از G می‌نامیم، هرگاه یالی از v به a وجود داشته باشد؛ یعنی یال va متعلق به E(G) باشد.

وقتـــی یک رأس v از گراف G مجـــاور رأس یا رأس‌هایی از G است، گوییم رأس v، خودش و رأس‌های مجاورش را احاطه می‌کند.

بنابراین می‌گوییم: یک رأس u از گراف G توسط رأس v از G احاطه می‌شود، هرگاه u=v یا $uv\in E(G)$؛ یعنی یالی از u به v

رسم شده باشد (شکل ۲).



(۲)

حال می‌خواهیم مفهوم احاطه شدن را برای کلاً یک زیرمجموعه از مجموعهٔ رأس‌های گراف G تعریف کنیم. در شکل ۲، گراف G با مجموعهٔ رأس‌های $V=\{a,b,c,d,e,u,v\}$ مفروض است. رأس‌های a، b، c و v، بنابر آنچه که بیان کردیم، هر کدام مجاور رأس v یا منطبق بر v هستند، پس رأس v خودش و سه رأس a، b و c را احاطه کرده است. به همین ترتیب، رأس u سه رأس c، d و e و خود u را احاطه کرده است. اگر $S=\{v,u\}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم که هر رأس گراف G که انتخاب کنیم یا متعلق به S است، یا مجاور رأسی از G است. یعنی تمام عضوهای S، عضوهای V را احاطه کرده‌اند. پس تعریف زیر را داریم:

تعریف: فرض کنیم V مجموعهٔ رأس‌های گراف G و S زیرمجموعه‌ای از V باشد. در این صورت $S\subseteq V$ را یک مجموعهٔ احاطه‌گر G می‌نامیم، هر گاه هر رأس گراف G یا متعلق به S باشد، یا حداقل با یکی از رأس‌های S مجاور باشد.

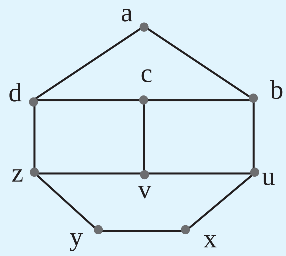
اگر دوباره به مثال قبلی برگردیم که: $S=\{v,u\}$، آن‌گاه: $V\text{-}S=\{a,b,c,d,e\}$ ، حال اگر هر رأسی از V-S را درنظر بگیریم، مجاور رأسی از S است. پس تمام رأس‌های V-S توسط رأس‌های S احاطه می‌شوند. خود رأس‌های S نیز طبق تعریف خودشان را احاطه می‌کنند. بنابراین می‌توانیم تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر را به‌صورت زیر نیز بیان کنیم:

اگر V مجموعهٔ رأس‌های گراف G باشد و: $S\subseteq V$، در این صورت S را یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G می‌نامند، هرگاه هر رأس V-S حداقل مجاور یک رأس S باشد.

بنابراین تعریف، $S=\{v,u\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G در مثال قبلی، یعنی شکل ۲ است. وقتی رأس v یک رأس احاطه‌گر باشد، آن را با نماد ⊙ نشان می‌دهیم تا از سایر رأس‌های مجاور متمایز باشد.

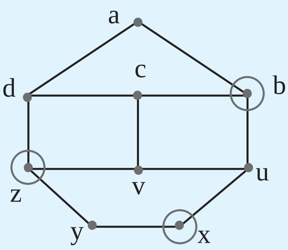
مثال ۱. در گراف G رسم شده یک مجموعهٔ احاطه‌گر پیدا کنید (شکل ۴).

پاسخ: باید رأس‌هایی را انتخاب کنیم که رأس‌هایی در مجاور آن باشند. معمولاً رأسی را انتخاب می‌کنیم که رأس‌های بیشتری مجاور آن باشند. مثلاً رأس b می‌تواند خودش و رأس‌های a، c و u را احاطه کند. به همین ترتیب، رأس z خودش و سه رأس d، v و y را احاطه می‌کند. اما مشاهده می‌کنیم که رأس x از G



(۳)

توسط هیچ‌کدام از این دو رأس احاطه نمی‌شود. پس خود رأس x باید خودش را احاطه کند. در نتیجه، $S=\{b,z,x\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر گراف G است.



(۴)

آیا هر رأس از V-S مجاور حداقل یک رأس S است؟

اگر هر عضو V را از مجموعه رأس‌های V در گراف G انتخاب کنیم، یا متعلق به S است یا مجاور رأسی از S است. آیا $S=\{d,u,y\}$ هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟ چرا؟

آیا می‌توانید مجموعه‌ای با دو عضو پیدا کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد؟ چرا؟

این گراف از مرتبهٔ ۹ است و بزرگ‌ترین درجه در آن ۳ است. اگر یک مجموعهٔ احاطه‌گرِ دو عضوی داشته باشد، حداکثر می‌تواند ۸=۲×۴ رأس G را احاطه کند؛ چرا؟

پس یک رأس G باقی می‌ماند. در نتیجه نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی داشته باشد.

همسایگی باز و بستهٔ یک رأس و مجموعهٔ احاطه‌گر

یادآوری می‌کنیم که در یک گراف، رأس v را مجاور رأس u می‌گوییم، هرگاه u و v با یالی به هم متصل شده باشند. اکنون با توجه به مفهوم رأس مجاور یک رأس، مفهومی به نام «همسایگی» را تعریف می‌کنیم.

تعریف: مجموعهٔ همهٔ رأس‌های مجاور یک رأس v از گراف G را یک همسایگی باز v می‌نامیم و آن را به N(v) نشان می‌دهیم. تعداد عضوهای همسایگی باز v را به |N(v)| نشان می‌دهیم.

واضح است که: $|N(v)|=deg(v)$.

$N(v)\cup\{v\}$ را یک همسایگی بسته v می‌نامیم و آن را به N[v] نشان می‌دهیم. $|N[v]|=1+deg(v)$.

اگر V مجموعهٔ رأس‌های گراف G باشد و : $S\subseteq V$، آن‌گاه $N(S)=\bigcup_{v\in S} N(v)$ مجموعهٔ همسایگی باز مجموعهٔ S است. همچنین، $N[S]=N(S)\cup S$ همسایگی بستهٔ مجموعهٔ S است.

در گراف شکل ۵، اگر:

$S=\{u,v\}$

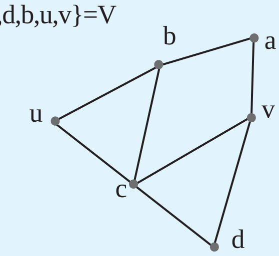
$N(v)=\{a, c, d\}$, $N[v]=\{v, a, c, d\}$

$N(u)=\{b, c\}$, $N[u]=\{u, b, c\}$

آن‌گاه:

$N(S)=N(v)\cup N(u)=\{a,c,d,b\}$

$N[S]=N(S)\cup S=\{a,c,d,b,u,v\}=V$



(۵)

زیرمجموعه‌هایی مانند S از V را که در آن‌ها داریم: $N[S]=V$ اهمیت بیشتری دارند و موضوع بحث بعدی هستند.

وقتی رأس‌هایی از یک گراف G همسایگی بسته رأس v هستند، می‌گوییم رأس v این رأس‌ها را احاطه می‌کند. یعنی یک رأس v از G، خودش و هر همسایگی‌اش را احاطه می‌کند. به عبارت دیگر:

رأس v از گراف G، N[v] یعنی همسایگی‌های بستهٔ خودش را احاطه می‌کند. در این صورت رأس v، $1+\deg(v)$ رأس G را احاطه می‌کند.

حال اگر S زیرمجموعه‌ای از V، مجموعهٔ رأس‌های یک گراف G باشد و عضوهای S بتوانند تمام رأس‌های G یعنی V را احاطه کنند، آن‌گاه S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

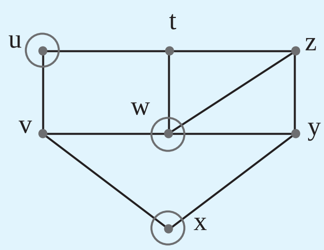
بنابراین تعریف زیر را داریم:

$S\subseteq V(G)$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است، اگر و فقط اگر: $N[S]=V$.

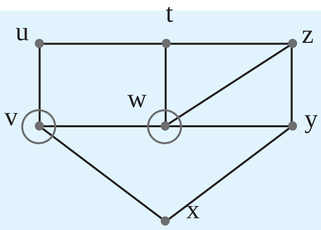
مثال ۲. در شکل ۶، $S_1=\{w, u, x\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

$N[S_1]=N[u]\cup N[w]\cup N[x]=\{u,t,v\}\cup\{w,v,t,z,y\}\cup\{x,v,y\}=V$

$|S_1|=3$



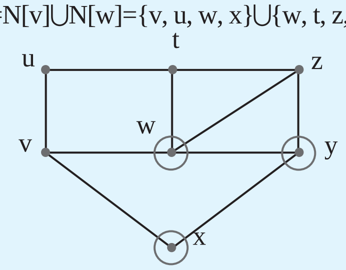
(۶)



(۷)

در همین مثال (شکل ۷)، $S_2=\{v, w\}$ نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر است که: $|S_2|=2$،

$N[S_2]=N[v]\cup N[w]=\{v, u, w, x\}\cup\{w, t, z, y\}=V$



(۸)

در شکل ۸، $S_3=\{x, y, w\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر نیست، زیرا رأس u مجاور هیچ رأسی از رأس‌های S_3 نیست.

$N[S_3]=N[x]\cup N[y]\cup N[w]=\{x, v, y, w, z, t\}\neq V$

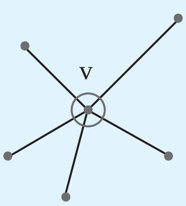
مشاهده می‌کنید که $N[S_3]$ برابر V نیست، پس نمی‌تواند مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد.

چند ویژگی

۱. رأس‌های مجموعهٔ V خودش یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. بنابراین مجموعهٔ احاطه‌گر برای هر گراف تعریف می‌شود.

۲. اگر S و T دو مجموعه از رأس‌های گراف G باشند، به‌طوری که: $S\subseteq T$، اگر S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، آن گاه T نیز یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است.

۳. فرض کنیم $v\in V$ رأسی از گراف G از مرتبه n باشد، در این صورت {v} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است، اگر و فقط اگر: $\deg(v)=n-1$.



(۹)

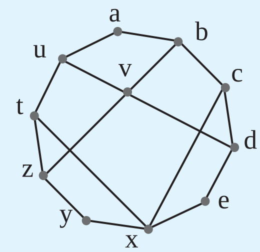
۴. اگر درجهٔ هر رأس گراف G برابر k باشد: $k=\deg(v)$، آن‌گاه هر رأس گراف می‌تواند $1+k$ رأس گراف G را احاطه کند.

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و عدد احاطه‌گری

پیدا کردن مجموعهٔ احاطه‌گر ماکزیمم جذابیتی ندارد، زیرا خود V یک مجموعهٔ احاطه‌گر خودش است که بیشترین تعداد عضو را دارد. اما مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مهم است.

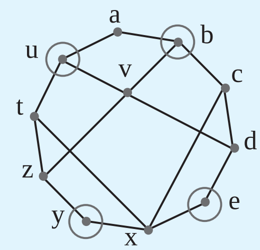
مثال ۳. مطابق شکل ۱۰، گراف G از مرتبهٔ ۱۱ است. برای G مجموعه‌های احاطه‌گری پیدا کنید.

(۷)



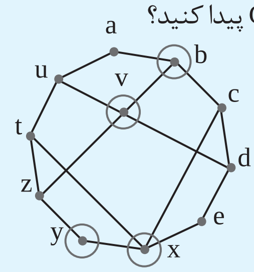
(۱۰)

پاســـخ: در شـــکل ۱۱، مجموعـــۀ $S_1=\{b, e, y, u\}$ یک زیرمجموعۀ V است که یک مجموعۀ احاطه‌گر برای G با چهار عضو محسوب می‌شود.



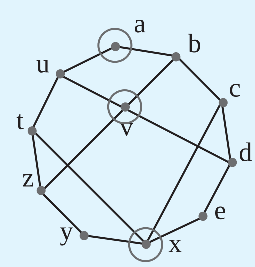
(۱۱)

در شـــکل ۱۲، $S_2=\{b, v, x, y\}$ نیز یک مجموعۀ احاطه‌گر چهار عضوی برای G است. آیا می‌توانید یک مجموعۀ احاطه‌گر با تعداد عضو کمتر برای G پیدا کنید؟



(۱۲)

با کمی دقت مشاهده می‌کنید که در شکل ۱۳، $S_3=\{a, v, x\}$ نیز یک مجموعۀ احاطه‌گر سه عضوی برای گراف G است. آیا می‌توانید یک مجموعۀ احاطه‌گری با کمتر از سه عضو برای G پیدا کنید؟



(۱۳)

به‌طور شهودی شاید پاسخ شما منفی باشد. آیا می‌توانید با یک استدلال منطقی نشان دهید که مجموعۀ احاطه‌گری با کمتر از سه عضو برای G وجود ندارد؟

فرض کنید بتوان گـــراف G را با یک مجموعۀ دو عضوی از رأس‌های V احاطه کرد. این دو رأس را p و q می‌نامیم. چون هر رأس، $1+deg(p)$ رأس را احاطه می‌کند، پس این دو رأس حداکثر $1+deg(p)+1+deg(q)=2+deg(p)+deg(q)$ رأس V را احاطـــه می‌کنند. اما ماکزیمم درجه در این گراف $\Delta(G)=4$ است. پس:

$$2+deg(p)+deg(q)\leq 2+4+4=10$$

پس حداکثر این دو رأس می‌توانند ۱۰ رأس V را احاطه کنند. امـــا گراف G از مرتبۀ ۱۱ اســـت، در نتیجه لااقل یک رأس آن به وســـیلۀ هیچ رأســـی از G احاطه نمی‌شود. پس با هیچ مجموعۀ دو عضـــوی از رأس‌های G نمی‌توان این گراف را احاطه کرد.

در نتیجـــه می‌گوییم: $S_3=\{a, v, x\}$ یک مجموعۀ احاطه‌گر با کمترین عضو یا مینیمم برای گراف G است. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریـــف: یک مجموعـــۀ احاطه‌گر گـــراف G را مجموعۀ احاطه‌گـــر مینیمم می‌نامیم، هرگاه بین مجموعه‌های احاطه‌گر G کمترین عضو را داشـــته باشد. تعداد عضوهای این مجموعۀ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم.

$\gamma(G)$ را γ- مجموعه نیز می‌نامند.

اگر S_i هر مجموعه احاطه‌گر گراف G باشد، آن‌گاه:

$$\gamma(G) = \mathrm{Min}\left\{|S_i| \;\middle|\; \text{یک مجموعه احاطه‌گر است } S_i\right\}.$$

به عبارت دیگـــر، یک مجموعۀ احاطه‌گر S از G را مینیمم می‌نامند، هرگاه به ازای هر مجموعۀ احاطه‌گر X از G داشـــته باشیم: $|S|<|X|$.

ویژگی‌ها

۱. چون مجموعۀ رأس‌های یک گراف همواره یک مجموعۀ احاطه‌گر خودش اســـت، برای هر گراف عدد احاطه‌گری تعریف می‌شود.

۲. اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشـــد، در این صورت V(G) تنها مجموعۀ احاطه‌گر G اســـت که مینیمم نیز به حساب می‌آید. یعنی، در گراف از مرتبۀ n، $\gamma(G)=n$ اگر و فقط اگر G گراف تهی $\overline{K}_n$ باشد.

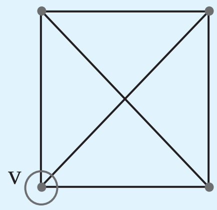
۳. یک گراف G از مرتبۀ n دارای عدد احاطه‌گری ۱ اســـت، اگر و فقط اگر G شامل یک رأس v از درجۀ n-۱ باشد.

G : $\gamma(G)=1 \Leftrightarrow deg(v)=n-1$ از مرتبۀ n است.

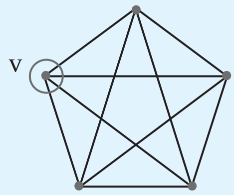
در این حالت، $\{v\}$ که $v\in V$ یک مجموعۀ احاطه‌گر مینیمم است.

نتیجه: در هر گراف کامل، هر رأس می‌تواند یک مجموعۀ احاطه‌گر گراف باشد. هر رأس به n-۱ رأس دیگر متصل است.

بنابراین در هر گراف کامل، مجموعۀ احاطه‌گر مینیمم فقط یک عضو دارد. یعنی عدد احاطه‌گری برابر یک است.

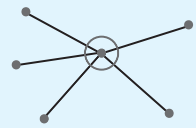


(۱۵)



(۱۴)

اما عکس آن همواره درست نیست، زیرا در هر گرافی از مرتبهٔ n که درجهٔ یک رأس $n-1$ باشد، داریم: $\gamma(G)=1$.



(۱۶)

۴. به ازای هر عدد صحیح و مثبت n و عدد صحیح k که: $1\leq k\leq n$ گرافی وجود دارد که: $\gamma(G)=k$.

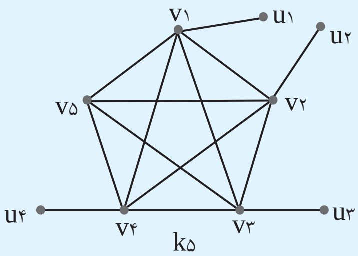
فرض کنیم که G گرافی از مرتبهٔ n باشد. مجموعهٔ رأس‌های آن را $V=\{a_1, a_2, a_3,...,a_{n-1}, a_n\}$ می‌نامیم. اگر G گرافی تهی $\overline{K}_n$ باشد، واضح است که: $\gamma(G)=n$. حال اگر فقط یال a_1a_2 را رسم کنیم، $n-2$ رأس باقی‌مانده که همه منفرد هستند، دارای عدد احاطه‌گری $n-2$ است. اکنون $v_1=\{a_1, a_2\}$ دارای عدد احاطه‌گری ۱ است. پس در این گراف کلاً عدد احاطه‌گری عبارت است از: $\gamma(G)=n-1$. به همین ترتیب اگر یا ل a_3a_4 را رسم کنیم، $\gamma(G)=n-2$ خواهد بود و تا $\frac{n}{2}$ می‌توان ادامه داد. بنابراین تا حالتی که $k\geq\frac{n}{2}$ این عدد مشخص می‌شود. حال اگر: $1\leq k\leq\frac{n}{2}$ همواره می‌توان گرافی همبند پیدا کرد که: $\gamma(G)=k$. در مثال بعدی آن را دنبال می‌کنیم.

مثال۴. ثابت کنید برای هر دو عدد صحیح n و k که: $1\leq k\leq\frac{n}{2}$، همواره یک گراف همبند از مرتبهٔ n وجود دارد که: $\gamma(G)=k$.

پاسخ: گراف کامل K_{n-k} شامل $n-k$ رأس $\{v_1, v_2, ..., v_{n-k}\}$ را رسم می‌کنیم. واضح است که: $\gamma(K_{n-k})=1$.

اکنون k رأس جدید $u_1,u_2,...,u_k$ را به آن اضافه می‌کنیم. پس گراف همبند G از مرتبهٔ n پدید می‌آید. سپس k یال جدید v_iu_i که $1\leq i\leq k\leq\frac{n}{2}$ را رسم می‌کنیم. پس از همهٔ رأس‌های u_1، u_2، ... و u_k که k رأس K_{n-k} یالی رسم شده، ممکن است به رأسی از آن یالی متصل نشده باشد، چون: $k\leq n-k$؛ چرا؟ پس کافی است مجموعهٔ احاطه‌گر G را همان k رأس از $n-k$ رأس K_{n-k} انتخاب کنیم. در این صورت: $\gamma(G)=k$.

مثال عددی: فرض کنید $n=9$ و $1\leq k\leq\frac{n}{2}<5$ (شکل ۱۷). پس k هر یک از عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴ را می‌تواند اختیار کند. فرض کنیم: $k=4$. پس گراف کامل $K_{9-4}=K_5$ را در نظر می‌گیریم.



(۱۷)

$\gamma(K_5)=1$

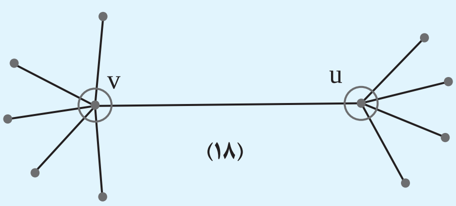
اکنون چهار رأس u_1،u_2،u_3 و u_4 را به گراف K_5 اضافه و یال‌های v_1u_1، v_2u_2، v_3u_3 و v_4u_4 را رسم می‌کنیم. گراف همبند G از مرتبهٔ ۹ پدید می‌آید که: $\gamma(G)=4$.

مثال ۵. گرافی از مرتبهٔ n، $n\geq 4$ مشخص کنید که در آن: $\gamma(G)=2$.

پاسخ: کافی است دو گراف ستاره‌ای رسم و رأس‌های ستاره‌ها را به هم وصل کنید (شکل ۱۸). اگر هم رأس‌های دو ستاره را به هم وصل نکنیم، یک گراف ناهمبند پدید می‌آید.

$deg(v)=k-1$ و $deg(u)=n-k-1$

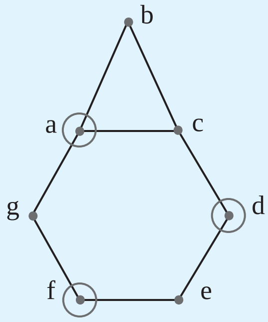
$N[v]\cup N[u]=V$ و $|N[u]|=n-k$ و $|N[v]|=k$



(۱۸)

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

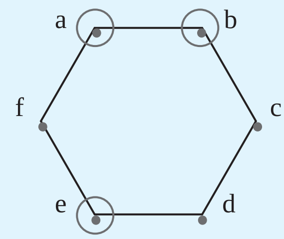
گراف G را مطابق شکل ۱۹ در نظر می‌گیریم. $S=\{a,d,f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. اگر هر یک از عضوهای a یا d یا f از S را حذف کنیم، آیا S باز هم یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است؟



(۱۹)

مشاهده می‌کنیم که با حذف هر یک از رأس‌های a، d یا f از مجموعهٔ S، دیگر این مجموعهٔ S یک مجموعهٔ احاطه‌گر

G نیست. به عبارت دیگر، هیچ‌کدام از زیرمجموعه‌های محض S-{a}، S-{d} و S-{f} از مجموعهٔ S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نخواهند بود. وقتی یک مجموعهٔ احاطه‌گر G دارای چنین ویژگی باشد، آن‌گاه این مجموعهٔ احاطه‌گر را یک مجموعهٔ «احاطه‌گر مینیمال» G می‌نامند.



(۲۰)

اکنون گراف G را که در شکل ۲۰ رسم شده است، در نظر می‌گیریم. S={a,b,e} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. با حذف رأس b یا e از S مشاهده می‌کنیم که زیرمجموعه‌های S-{b} و S-{e} دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر G نیستند. اما با حذف رأس a از S، زیرمجموعهٔ S-{a} از S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G است. چرا؟

در این حالت می‌گوییم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G نیست. بنابراین تعریف زیر را داریم:

تعریف: یک مجموعهٔ احاطه‌گر S از گراف G را مینیمال گویند، هرگاه با حذف هر عضوی از S مجموعهٔ حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشد.

به عبارت دیگر، هیچ زیرمجموعهٔ محض S یک مجموعهٔ احاطه‌گر G نباشد.

فرض کنیم S یک مجموعهٔ احاطه‌گر S باشد. از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر حداقل یک زیرمجموعهٔ محض S وجود داشته باشد که مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، آن‌گاه S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیست. یا اگر با حذف حداقل یک عضو S، مجموعهٔ حاصل یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد، در این صورت S مینیمال نیست.بنابراین:

هر مجموعهٔ احاطه‌گر S از G مینیمال نیست، هرگاه:

الف) شامل حداقل یک رأس v باشد، به‌طوری که S-{v} یک مجموعهٔ احاطه‌گر G باشد،

ب) یک زیرمجموعهٔ محض S یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال G باشد.

هر مجموعهٔ احاطه‌گر یک گراف را می‌توان به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد. زیرا اگر مینیمال نباشد، با حذف رأس یا بعضی رأس‌ها می‌تواند به مینیمال تبدیل شود. توجه داشته باشید که تعداد رأس‌ها متناهی هستند. در نتیجه:

هر گراف حداقل شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.

با توجه به تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر کمترین عضو را دارد، نتیجه می‌گیریم که هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم همواره مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال نیز هست. اما عکس آن همواره صحیح نیست. بنابراین ممکن است در یک گراف G، مجموعه‌ای احاطه‌گر مینیمال باشد، اما مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نباشد.

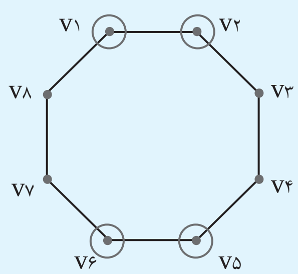
در گراف G هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است، اما عکس آن درست نیست.

مثال بعدی را مشاهده کنید.

در شکل ۲۱ گراف دوری C_8 را مشاهده می‌کنید که $S=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر آن است. اگر هر رأسی از S حذف کنیم، مجموعهٔ باقی‌مانده، یک مجموعهٔ احاطه‌گر نخواهد بود.

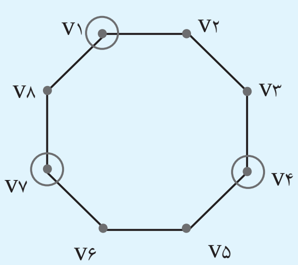
یعنی $S=\{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است. آیا فکر می‌کنید S مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم نیز هست؟

(C۸)



(۲۱)

یک رأس v_1 را اختیار کنید. این رأس، رأس‌های v_2 و v_8 را احاطه می‌کند. اکنون به‌طور دوری در جهت ساعت‌گرد، اگر رأس v_4 را به‌عنوان رأس دوم مجموعهٔ احاطه‌گر انتخاب کنیم، رأس‌های v_3 و v_5 را نیز احاطه می‌کند. می‌توانیم با گذشتن از دو رأس دیگر به رأس احاطه‌گر سوم برسیم که رأس v_7 است. پس $D=\{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر سه عضوی این گراف است.

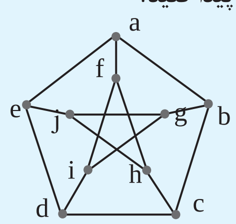


(۲۲)

آیا این گراف مجموعهٔ احاطه‌گری با دو عضو نیز دارد؟ چرا؟

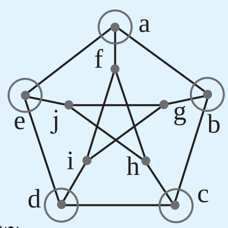
هر رأس از درجهٔ دو است. پس اگر دو رأس احاطه‌گر داشته باشد، حداکثر ۶ رأس این گراف را می‌تواند احاطه کند، اما این گراف ۸ رأس دارد، پس مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی نمی‌تواند داشته باشد. در نتیجه، $D=\{v_1, v_4, v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم C_8 است و البته مینیمال نیز خواهد بود.

مثال ۶. با گراف **پترسن**[4] که گرافی از مرتبهٔ ۱۰ و سه منتظم است، آشنایی دارید. آیا می‌توانید مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال و مینیمم برای آن پیدا کنید؟

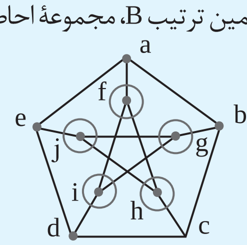


(۲۳)

پاسخ: مجموعه‌های $A=\{a,b,c,d,e\}$ و $B=\{i,j,h,g,f\}$ هر دو مجموعه‌های احاطه‌گر G هستند و در عین حال هر دو، مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال G محسوب می‌شوند، اما مینیمم نیستند. می‌توانید نشان دهید که با حذف رأس a از مجموعهٔ A، $A-\{a\}$ زیرمجموعهٔ محض A است که دیگر مجموعهٔ احاطه‌گر نیست؛ زیرا هیچ رأس $A-\{a\}$ همسایهٔ f نیست. به همین ترتیب B، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است.



(۲۴)



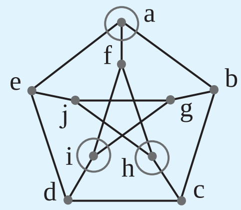
(۲۵)

اکنون آیا می‌توانید مجموعهٔ احاطه‌گری با تعداد عضوهای کمتر برای گراف P پیدا کنید؟

فرض کنیم این گراف مجموعهٔ احاطه‌گری با k عضو داشته باشد. چون سه منتظم است، پس هر رأس یک مجموعهٔ احاطه‌گر حداکثر می‌تواند ۴=۳+۱ رأس P را احاطه کند. اما گراف پترسن ۱۰ رأس دارد، پس: $4k \ge 10$. یعنی: $k \ge \frac{10}{4}$ که کمترین مقدار آن $k=3$ است.

پس امکان دارد این گراف دارای یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم با عدد احاطه‌گری ۳ باشد. سعی کنید آن را پیدا کنید.

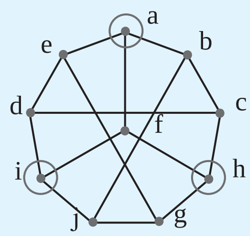
با انتخاب سه رأس a، i و h مشاهده می‌کنیم که $D=\{a,i,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است (شکل ۲۶) و چون: $\gamma(p) \ge 3$، پس: $\gamma(p)=3$ و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم گراف پترسن است.



(۲۶)

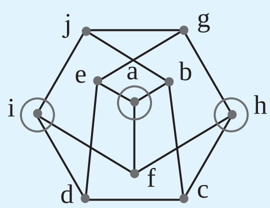
این گراف را به صورت‌های زیر نیز می‌توانیم نشان دهیم که یک‌ریخت با نمودار قبلی است.

در شکل ۲۷، با استفاده از یک گراف دوری C_9، پیدا کردن مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ساده‌تر است.



(۲۷)

در شکل ۲۸، نمونهٔ دیگری از گراف پترسن را مشاهده می‌کنید.



(۲۸)

پی‌نوشت‌ها

1. Berge
2. Ore
3. Dominating
4. Peterson
5. Bipartite Graphs
6. Shepherd & White
7. Reed
8. Corona of H

منابع

1. Haynes, Teresa W.; Jedetniemi, Stephen T.: Sater, Peter J. (1998). Fundamentals of domination in graphs. Marcel Dekker, Ine. NewYork.
2. Balakishnan, R & Rangannthan, K. (2000). A text book of graph theory springer. Springer-verlag, NewYork.
3. Aldous, Joan M. & Wilson, Robin J. (2000). Graphs and applications. Springer-verlag, London.